

1. Introduction

Динамика электронов в накопителе с длиной орбиты $L = 2\pi\rho_*$ (ρ_* – средний радиус) определяется периодическими функциями $\rho(s) = \rho(s+L)$ и $k(s) = k(s+L)$, связанными с дипольной и квадрупольной компонентами магнитного поля. Периодическое решение уравнения Хилла (горизонтальное движение; штрих обозначает d/ds) $y'' + Ky = \rho^{-1}$ ($K(s) = \rho^{-2} - k$; для вертикального движения $\tilde{K} = k$) – дисперсионная функция $\eta(s)$. Ее можно выразить, помимо $\rho(s)$, с помощью β -функции (и ‘фазы’ $\Phi = \int \beta^{-1} ds$), которая есть периодическое решение уравнения $\beta\beta'' - \beta'^2 + 4K\beta^2 = 4$.

Горизонтальный эмиттанс электронов связан с интегралами по орбите (функционалы от β , ρ ; здесь $\alpha = -\frac{1}{2}\beta'$, $C_q = 3.84 \times 10^{-13}$ м, γ – релятивистский фактор, $J_x \approx 1$) [1]:

$$\epsilon_x = C_q \gamma^2 J_x^{-1} \mathcal{L}(\rho, \beta), \quad \mathcal{L} = \left(\int \frac{\eta^2 + (\alpha\eta + \beta\eta')^2}{\beta|\rho|^3} ds \right) \cdot \left(\int \frac{ds}{\rho^2} \right)^{-1}. \quad (1)$$

Зная бета-функцию, можно найти $K(s)$, но не всякая $\beta > 0$ даст устойчивое вертикальное движение (т.е. $\tilde{\beta} > 0$). Поэтому введем следующее ограничение: $\langle K + \tilde{K} \rangle_s = \langle 1/\rho^2 \rangle_s$

$$\int (p\rho^{-2} - K) ds = 0 = \int \left(\frac{\beta''}{2\beta} - \frac{\beta'^2}{4\beta^2} - \frac{1}{\beta^2} + \frac{p}{\rho^2} \right) ds, \quad \text{где } 0 < p < 1. \quad (2)$$

Безразмерная фаза $\Phi(s)$ ($\Phi(s+L) - \Phi(s) = 2\pi Q$, Q – ‘число’ бетатронных колебаний, должно быть нецелым) есть неубывающая функция аргумента s , т.е. всегда существует обратная функция. Вместо размерных s и y удобно перейти к безразмерным переменным

$$w = y/\sqrt{Q\beta\rho_*}, \quad \tau = Q^{-1}\Phi, \quad d\tau = Q^{-1}\beta^{-1}ds; \quad 2\pi Q = \int \beta^{-1}ds, \quad 0 \leq \tau \leq 2\pi. \quad (3)$$

Тогда уравнение Хилла примет следующий вид (точка обозначает производную по τ):

$$\ddot{w} + Q^2 w = AB^3, \quad \text{где } A = \rho_*/\rho, \quad B = \sqrt{Q\beta/\rho_*} (ds = \rho_* B^2 d\tau), \quad (4)$$

причем $Q = \frac{p}{\langle \beta \rangle} = 2\pi\rho_*/\int_0^{2\pi} \beta d\tau$, т.е. (нормируем B^2 на единицу)

$$\langle B^2 \rangle \equiv \langle B^2 \rangle_\tau \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} B^2 d\tau = 1. \quad (5)$$

Информация о средней величине бета-функции содержится в параметре Q .

Для функционала (1) будем иметь выражение

$$\mathcal{L}(A, B; Q) = \left\langle Q|A|^3 B^2 \left(w^2 + \frac{\dot{w}^2}{Q^2} \right) \right\rangle \cdot \langle A^2 B^2 \rangle^{-1}, \quad (6)$$

а условие (2) примет вид (первый член интегрируется по частям; $0 < p < 1$)

$$\langle \dot{B}^2 B^{-4} - Q^2 B^{-2} + p A^2 B^2 \rangle = 0. \quad (7)$$

На периодическую функцию $A(\tau)$ (кривизна орбиты) должны быть наложены условия замкнутости орбиты. Вводя угол поворота орбиты $\psi(\tau)$, $d\psi = \rho^{-1} ds = AB^2 d\tau$, $\dot{\psi} = AB^2$, можно записать эти условия так: $\Delta\psi = \oint \rho^{-1} ds = 2\pi N$, $\oint e^{i\psi} ds = 0$, где N – целое; $N=1$ – орбита типа круга, $N=0$ – орбита ‘восьмерка’. Или в новых переменных:

$$\langle AB^2 \rangle = N, \quad \langle B^2 \cos \psi \rangle = \langle B^2 \sin \psi \rangle = 0. \quad (8)$$

2. Uniform orbit, $k = 0$ ($\rho = \text{const}$)

Минимизацию функционала (6), с учетом условий (7), (8), можно проводить методом Рунге, раскладывая A и B в ряд Фурье. Рассмотрим частные случаи, со связью вида $AB^k = \text{const}$; и сперва – $k=0$ (однородная орбита, $A=1$).

Обозначив $C_n = \cos n\tau$, $S_n = \sin n\tau$ ($\langle S_j \rangle = 0$, $\langle C_j \rangle = \delta_j^0$), возьмем ($n > 0$ – целое)

$$B = q + aC_n; \quad B^2 = 1 + 2aqC_n + \frac{1}{2}a^2C_{2n}; \quad q = \sqrt{1 - \frac{1}{2}a^2};$$

эта зависимость $q(a)$ нужна для условия $\langle B^2 \rangle = 1$, см. (5). Из уравнения (7) получаем

$$\langle B^{-2} \rangle Q^2 = p + a^2 n^2 \langle (1 - C_n^2) B^{-4} \rangle, \quad Q^2 = \frac{p(2 - 3a^2)^{3/2}}{2(2 - a^2)^{1/2}} + \frac{a^2 n^2}{2 - 3a^2}. \quad (9)$$

Здесь для вычисления интегралов (ниже q и a независимы) $I_k(q, a) = \langle B^{-k} \rangle$ можно использовать рекуррентное соотношение: $\frac{\partial I_k}{\partial q} = -k I_{k+1}$. Нам понадобятся интегралы

$$I_1 = U^{-1}, \quad I_2 = qU^{-3}, \quad I_4 = q(q^2 + 3a^2/2)U^{-7}, \quad I_7 = (q^4(q^2 + 15a^2/2) + 15a^4(3q^2 + a^2)/8)U^{-13}; \quad (10)$$

здесь $U = \sqrt{q^2 - a^2}$. Схожим образом можно найти и другой интеграл в (9):

$$\langle C_n^2 B^{-4} \rangle = \frac{1}{6} \frac{\partial^2 I_2}{\partial a^2} = \frac{q(q^2 + 4a^2)}{2U^7}.$$

Другой способ – переход к комплексной переменной $z = e^{in\tau}$, $2C_n = z + z^{-1}$, $B = \frac{a}{2z} (z^2 + \frac{2q}{a}z + 1)$. Тогда для интегралов $I_k(q, a)$ ($0 < a < q = \sqrt{1 - \frac{1}{2}a^2}$) можно получить:

$$\left\langle \frac{1}{B^k} \right\rangle = \left(\frac{2}{a} \right)^k \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{dz z^{k-1}}{(z + \lambda)^k (z + \lambda^{-1})^k}, \quad \lambda = \frac{q - \sqrt{q^2 - a^2}}{a}, \quad \lambda^{-1} = \frac{q + \sqrt{q^2 - a^2}}{a},$$

и они сводятся к вычислению вычета в точке $z = -\lambda$ ($\lambda < 1$).

‘Новую дисперсионную функцию’ w находим как периодическое решение уравнения $\ddot{w} + Q^2 w = (q + aC_n)^3$. Используя ‘таблицу умножения’ $C_i C_j = \frac{1}{2}(C_{i-j} + C_{i+j})$, $S_i S_j = \frac{1}{2}(C_{i-j} - C_{i+j})$, $C_i S_j = \frac{1}{2}(S_{i+j} - S_{i-j})$, находим

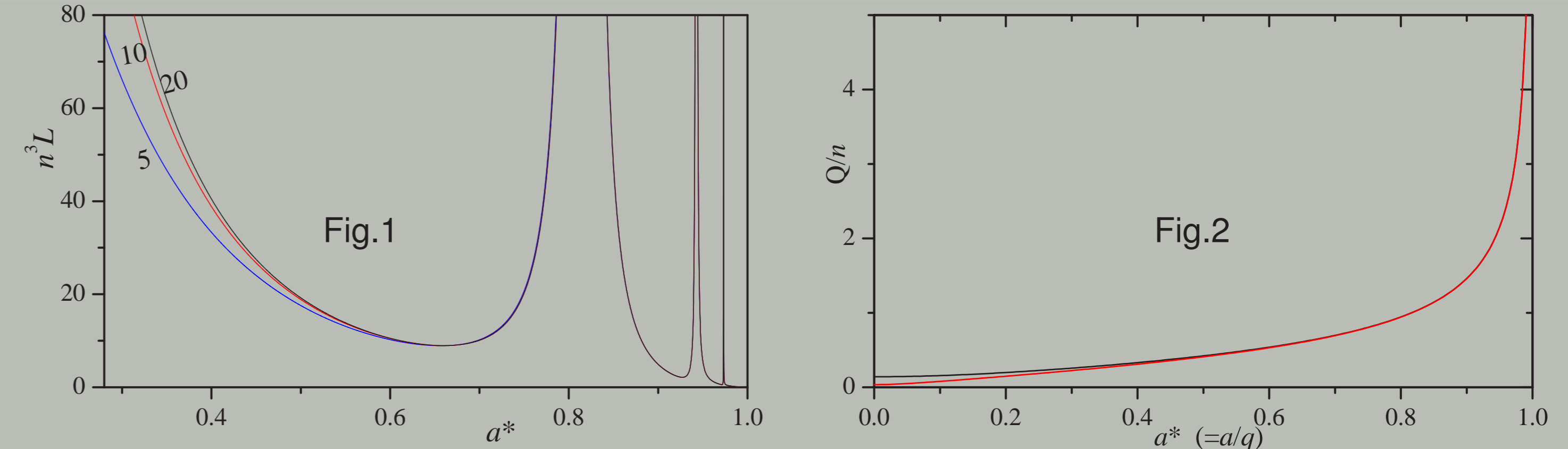
$$\begin{aligned} w &= d - d_1 C_n - d_2 C_{2n} - d_3 C_{3n}, \quad \dot{w} = n(d_1 S_n + 2d_2 S_{2n} + 3d_3 S_{3n}), \\ w^2 &= n^2[d_1^2 + 4d_2^2 + 9d_3^2 + d_1(6d_3 - d_1)C_{2n}]/2 + 2n^2 d_2(d_1 + 3d_3)C_n + (C_{3n}, \dots, C_{6n}), \\ w^2 &= d^2 + \frac{1}{2}[d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + (d_1^2 - 4dd_2 + 2d_1 d_3)C_{2n}] + (d_1 d_2 - 2dd_1 + d_2 d_3)C_n + \dots, \end{aligned}$$

где $d = \frac{1+a^2}{q-Q^2}$, $d_1 = \frac{3a}{4Q^2} \frac{4-a^2}{m-1}$, $d_2 = \frac{3qa^2}{2Q^2(4m-1)}$, $d_3 = \frac{a^3}{4Q^2(9m-1)}$, $m = \frac{n^2}{Q^2}$. (11)

Для функционала эмиттанса (6) находим (подставляя $B^2 = 1 + 2aqC_n + \frac{1}{2}a^2C_{2n}$)

$$\mathcal{L}/Q = \langle B^2 (w^2 + \dot{w}^2/Q^2) \rangle = d^2 + aq[d_1 d_2(1+2m) - 2dd_1 + d_2 d_3(1+6m)] + \frac{1}{2}\{d_1^2(1+a^2/4 + (1-a^2/4)m) + d_2^2(1+4m) + d_3^2(1+9m) + a^2(d_1 d_3(1+3m)/2 - dd_2)\}. \quad (12)$$

[1] S.Y. Lee, Phys. Rev. E54, 1940 (1996). L. Teng, Argonne Lab. Report LS-17 (1985).



На рис.1 для трех значений n (5, 10, 20; везде $p=0.5$) представлены графики ‘нормированного’ эмиттанса $n^3 \mathcal{L}$ как функции параметра $a^* = a/q$, $0 < a^* < 1$. Видны четыре минимума, разделенные резонансами, связанными с полосами функции w : $Q=n$, $Q=2n$, $Q=3n$. Произвольно малый эмиттанс достигается возле точки $a^*=1$; но это осложнено близостью ‘резонансов’ (в том числе дополнительных, связанных с гармониками в разложении A , B). Для первого минимума с хорошей точностью верна асимптотика $\mathcal{L}_{\min 1} \sim \frac{9}{n^3}$, где n – число максимумов (или минимумов) бета-функции; $a_{\min 1} = 0.66$.

На рис.2 показаны графики величины Q/n в зависимости от a^* для двух значений n (опять $p = 0.5$): $n = 5$ и $n = 20$. Вклад члена с p [см. (9)] очень невелик, и заметен только при малых значениях параметра a^* (в области ‘мягкой’ фокусировки).

3. Nonuniform orbit: $k = 2$ ($\dot{\psi} = 1$) and $k = 3$ ($w = \text{const}$)

Рассмотрим теперь частный случай $k = 2$ ($AB^k = \text{const}$), когда

$$AB^2 = 1 = \dot{\psi}, \quad B = q + aC_n; \quad \text{т.е. } A = B^{-2}, \quad \psi = \tau. \quad (13)$$

Последнее из условий (8), $\langle B^2 C_1 \rangle = 0$, выполняется, если $n > 1$. Ограничение (7) теперь дает $\langle B^{-2} \rangle (Q^2 - p) = \langle \dot{B}^2 B^{-4} \rangle$, $Q^2 = p + a^2 n^2 (2 - 3a^2)^{-1}$.

Функция w находится элементарно, как и геометрическая часть эмиттанса:

$$w = Q^{-2} \left(q - \frac{a}{m-1} C_n \right), \quad \dot{w} = Q^{-2} \frac{an}{m-1} S_n, \quad (14)$$

$$\mathcal{L} = \left\langle Q A^3 B^2 \left(w^2 + \frac{\dot{w}^2}{Q^2} \right) \right\rangle \cdot \langle A^2 B^2 \rangle^{-1} = Q^{-3} \left\langle \frac{e - f B^2}{B^4} \right\rangle \cdot \left\langle \frac{1}{B^2} \right\rangle^{-1}, \quad (15)$$

где $e = \frac{m}{m-1} \left(q^2 + \frac{a^2}{m-1} \right)$, $f = \frac{1}{m-1}$, $m = \frac{n^2}{Q^2}$. В итоге получаем ответ:

$$n^3 \mathcal{L} = \frac{m^{3/2}}{m-1} \left\{ m \frac{1+a^2}{(q^2 - a^2)^2} \left(q^2 + \frac{a^2}{m-1} \right) - 1 \right\}. \quad (16)$$

На рис.3 показаны графики нормированного эмиттанса $n^3 \mathcal{L}$ от $a^* = a/q$ для тех же значений n (снова $p = 0.5$). Теперь наблюдаем два минимума и один резонанс, причем первый минимум менее глубокий, чем раньше: $\mathcal{L}_{\min 1} \simeq \frac{37}{n^3}$; $a_{\min 1} = 0.59$.

Еще один интересный случай, для которого может быть найдено точное решение, это случай однородной ‘новой дисперсионной функции’, w , когда $AB^3 = \varepsilon = \text{const}$ и

$$A = \varepsilon B^{-3}, \quad \dot{\psi} = AB^2 = \varepsilon B^{-1}; \quad B = q + aC_n. \quad (17)$$

Требование $\langle AB^2 \rangle = 1$ дает [см. (10)]: $1 = \varepsilon \langle B^{-1} \rangle = \varepsilon/U$, $\varepsilon = U = \sqrt{q^2 - a^2}$.

Для проверки выполнения второго из условий (8), заметим что

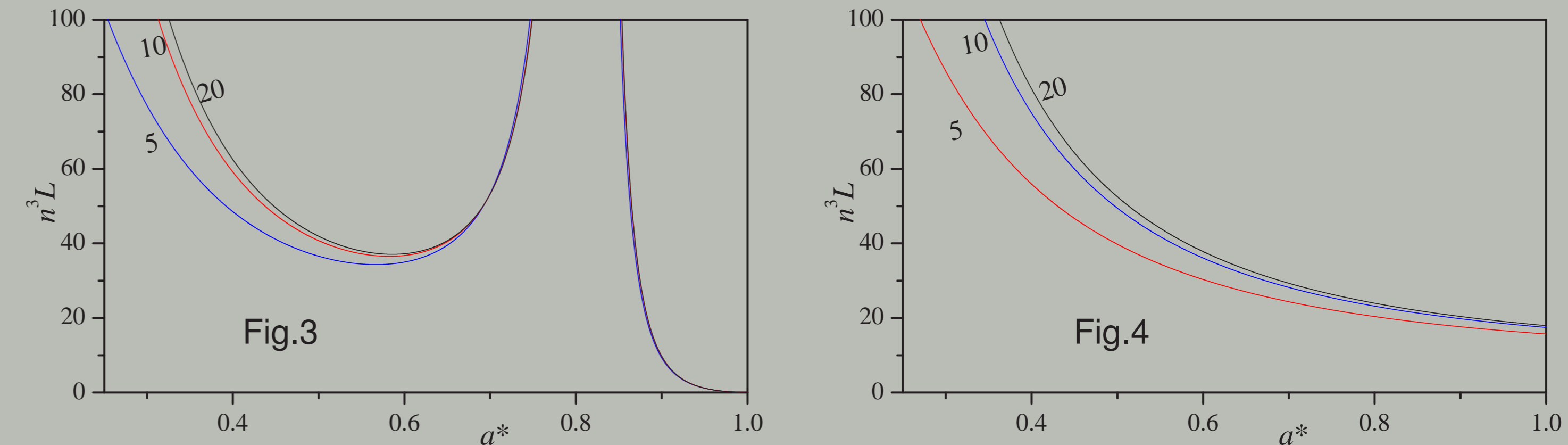
$$\psi = \tau + b_1 S_n + b_2 S_{2n} + \dots, \quad \cos \psi = C_1 \cos(b_1 S_n + b_2 S_{2n} + \dots) + S_1 \sin(b_1 S_n + b_2 S_{2n} + \dots);$$

можно видеть, что условие $\langle B^2 \cos \psi \rangle = 0$ выполнено, если $n > 1$ (можно проверить численным интегрированием; последнее условие в (8) тоже выполнено).

Из (7) следует: $Q^2 \langle B^{-2} \rangle = \langle \dot{B}^2 B^{-4} \rangle + p \varepsilon^2 \langle B^{-4} \rangle$, $Q^2 = (2p(1+a^2) + a^2 n^2)(2-3a^2)^{-1}$, а для w и функционала \mathcal{L} получаем [см. (10)]: $w = \varepsilon Q^{-2}$; $\mathcal{L} = Q^{-3} \varepsilon^3 \langle B^{-7} \rangle \cdot \langle B^{-4} \rangle^{-1}$,

$$n^3 \mathcal{L}(a; n) = \frac{n^3}{Q^3} \cdot \frac{1 - 6a^2 - a^4(18 + 13a^2)/16}{q(1+a^2)U^3}. \quad (18)$$

На рис.4 показаны графики для этого варианта: резонансов нет, но минимум не глубок.



4. Short magnets

Из ур-я (4) ясно, что для уменьшения эмиттанса магниты надо ставить в минимумы функции B ; желательно также, чтобы ‘дисперсия’ w была минимальна, а ее излом (от толчка магнита) – симметричен. Такая конфигурация показана на рис.5а. Если в структуре должны быть ‘пустые’ места с маленькими B , w (места вставки ID, виглеров), то возможна структура рис.5б с ‘половинными’ магнитами (толчок $\int AB^3 d\tau$ меньше в два раза). Если же предполагать, что ID (виглер) имеет ненулевое среднее поле (чтобы упростить вывод излучения и т.д.), то, соответственно, нужна схема типа рис.5в. Во всех случаях набег фазы функции w между магнитами должен быть равен π , т.е. $Q = n/2$; (это соотношение может несколько измениться, если магниты ‘длинные’).

